Gozet – Kurtzemann
Appel

Leçon 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

I. Premiers modes de convergence

Dans toute cette partie, on considère $(X_n)_{n\geq 1}$ et X des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

1. Convergence presque sûre

Définition 1.1 On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X presque sûrement si l'ensemble des ω tels que $X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)$ est de probabilité 1.

On écrit alors : $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ ou encore $X_n \longrightarrow X$ p.s.

Proposition 1.2 Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$ alors $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{p.s.} \alpha X + \beta Y$.

Théorème 1.3 Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

(i) $X_n \xrightarrow{p.s.} X$

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon \text{ ; i.s}) = 0$

(iii) pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\exists n \geq N, |X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

(iv) pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\sup_{n\geq N} |X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

Corollaire 1.4 (Critères pratiques de convergence p.s.)

- si pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$
- si la série $\sum \mathbb{E}[|X_n - X|]$ converge alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$

2. Convergence en probabilité

Définition 1.5 On dit que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On écrit alors : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Proposition 1.6 Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ alors $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha X + \beta Y$.

Exemple 1.7

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires centrées dont les écart-types respectifs σ_n tendent vers 0

pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}\, X_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc :

$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

Proposition 1.8 Soit $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue et bornée telle que $\psi(0) = 0$, ψ croissante et strictement croissante sur un voisinage de 0. Alors :

$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\psi(|X_n - X|)] = 0$.

Proposition 1.9 La convergence en probabilité est issue d'une métrique $d(X,Y) = \mathbb{E}[|X-Y| \wedge 1]$ qui rend $\mathcal{L}^0(\Omega)$ complet.

développement 1

Théorème 1.10 Soit g une fonction continue.

- si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors $g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X)$
- si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ alors $g(X_n) \xrightarrow{p.s.} g(X)$

Théorème 1.11 Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

D'autre part, si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors on peut extraire une sous-suite vérifiant $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{p.s.} X$.

Contre-exemple 1.12

On considère la suite d'intervalles $[0,1], [0,\frac{1}{2}], [\frac{1}{2},1], [0,\frac{1}{3}], \ldots$

On définit la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de fonctions sur $[0,1[$ comme indicatrices des intervalles précédents.

Alors :

- $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ où k vérifie $\frac{k(k-1)}{2} \leq n < \frac{k(k+1)}{2}$
- $\forall \omega \in [0,1]$, $X_n(\omega) = 1$ une infinité de fois donc $\{X_n \longrightarrow 0\} = \emptyset$

Donc :

$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ et $X_n \not\xrightarrow{p.s.} 0$

3. Convergence dans L^p

Définition 1.13 On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X dans L^p si pour tout $n \geq 1$, $X_n - X \in L^p(\Omega)$ et $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 1.14 Soient $1 \leq q \leq p$. Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ alors $X_n \xrightarrow{L^q} X$.

Théorème 1.15 Supposons que $X_n \xrightarrow{L^p} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

D'autre part, si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et s'il existe $q > p$ tel que $(\mathbb{E}[|X_n|^q])_n$ soit borné, alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Contre-exemple 1.16

soit $X \sim \mathcal{E}(1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X \mathbb{1}_{[0,n[}(X) + e^{2n} \mathbb{1}_{[n,+\infty[}(X)$

Alors :

$Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et : $\forall p \geq 1$, $Y_n \not\xrightarrow{L^p} X$

II - Convergence en loi

On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de $\mathbb{R}^d$ définies chacune sur son espace de probabilité $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ et X une variable aléatoire de $\mathbb{R}^d$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition 2.1 On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X si pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$.

On écrit alors : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Proposition 2.2 Soit $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $A \subset \mathbb{R}^d$. Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $\mathbb{P}(X \in A) = 1$ alors $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$.

Théorème 2.3 Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Proposition 2.4 Si X et les X_n sont réelles et à valeurs dans un même ensemble dénombrable $D = \{x_k \mid k \in K\}$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si pour tout $k \in K$

$$\mathbb{P}(X_n = x_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = x_k).$$

Proposition 2.5 Si X et les X_n admettent des densités respectives f et f_n, et si $(f_n)_n$ converge vers f presque partout, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Théorème 2.6 (Lévy) - admis On a : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si $(\phi_{X_n})_n$ converge simplement vers ϕ_X.

Théorème 2.7 (Slutsky) Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires définies sur un même espace de proba $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^d$.

S'il existe X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $c \in \mathbb{R}^d$ tels que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$.

III - Théorèmes limite

1. Lois des grands nombres

Théorème 3.1 (Loi faible des grands nombres) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d admettant un moment d'ordre 2. On obtient alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{L^2} \mathbb{E}[X_1] \text{ et } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1].$$

Théorème 3.2 (Loi forte des grands nombres) - admis Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. intégrables. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[X_1]$.

Contre-exemple 3.3

soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d vérifiant $\mathbb{E}[|X_1|] = +\infty$

On a alors :

$$\sup_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| = +\infty$$

2. Théorème central limite

développement 2

Théorème 3.4 (Théorème central limite) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant un moment d'ordre 2 fini. On note $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 := \mathrm{Var}\, X_1$. On a alors : $\sqrt{n}\,(\overline{X_n} - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Application 3.5

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue bornée, alors :

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-x^2/2}\, dx$$

Contre-exemple 3.6

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de loi $C(0,1)$ donc non intégrables

Pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \sim C(0,1)$

Donc : $\sqrt{n} \cdot \overline{X_n} \not\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, a)$ où $a \in \mathbb{R}_+$

Annexe

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[r, "L^q"] & X \arrow[r, Rightarrow, "q>p"] & X_n \arrow[r, "L^p"] & X \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
& & & & X_n \arrow[r, "\mathbb{P}"] & X \arrow[r, Rightarrow] & X_n \arrow[r, "\mathcal{L}"] & X \\
& & X_n \arrow[r, "p.s."] & X \arrow[ur, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}$$

$\sup_{r>p} \mathbb{E}[|X_n|^r] < +\infty$

le long d'une sous-suite